5. Nezávislé pokusy

DVA dílčí POKUSY JSOU NEZÁVISLÉ, jestliže pro všechny možné výsledky (ω_1, ω_2) platí:

$$p(\omega_1, \omega_2) = p(\omega_1) \cdot p(\omega_2)$$

kde ω_1 je lib. výsledek 1. pokusu a $p_1(\omega_1)$ jeho pravděpodobnost

ω_2 je lib. výsledek 2. pokusu a $p_1(\omega_1)$ jeho pravděpodobnost

(ω_1, ω_2) je lib. výsledek pokusu „sdruženého" z 1. a 2. pokusu

(např. hod 2 kostkami, ale ne tažení 1. a 2. čísla při tahu sportky)

– jsou-li dílčí pokusy nezávislé a je-li jev A určen jen výsledkem prvního dílčího pokusu a jev B jen výsledkem druhého, pak jevy A a B jsou nezávislé, tj. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Příklady

① Hod bílou a černou kostkou — NEZÁVISLÉ DÍLČÍ POKUSY ⇒ jevy A, B nezávislé

A … na bílé padne sudé číslo — $A = \{2, 4, 6\}$ $\quad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

B … na černé padne číslo < 3 — $B = \{1, 2\}$ $\quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

že jsou jevy A, B nezávislé lze ověřit porovnáním $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

– hod 2 kostkami $m = V'(2,6) = 6^2 = 36$ $\quad P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

B	Č	B	Č	B	Č
2	1	4	1	6	1
2	2	4	2	6	2

$m(A \cap B) = 6$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ } PLATÍ ROVNOST ⇒ A, B nezáv.

② V osudí je 6 bílých, 4 červené a 5 modrých koulí. Táhneme postupně 3 koule, po každém tahu vrátíme do osudí. Jaká je pravděpodobnost, že první bude bílá, druhá červená a třetí modrá.

– jde o trojí nezávislé opakování pokusu (po tahu vracíme)

A … táhneme 1. kouli bílou

B … táhneme 2. kouli červenou

C … táhneme 3. kouli modrou

$\left[P(A) = \frac{\binom{6}{1}}{\binom{15}{1}} \quad \frac{\text{táhneme 1 z 6B a 0 z ost.}}{\text{táhneme 1 z 15}} \quad \text{obd. } P(B), P(C) \right]$

– $D = A \cap B \cap C$

$$P(D) = P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{\binom{6}{1}}{\binom{15}{1}} \cdot \frac{\binom{4}{1}}{\binom{15}{1}} \cdot \frac{\binom{5}{1}}{\binom{15}{1}} = \frac{6}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{15} =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{225} \doteq 0{,}03\overline{5}$$

③ Dva lékaři stanoví správnou diagnózu v 8, pří. v 9 případech z 10. Jaká je pravděpodobnost, že pacientovi stanoví alespoň jednu správnou diagnózu, vyšetřují-li ho nezávisle na sobě?

1. zp. A … první správně $\quad P(A) = 0{,}8$

B … druhý správně $\quad P(B) = 0{,}9$

– C … aspoň 1 správně $(C = A \cup B)$

$P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}98$

2. zp. C' … oba nesprávně $\quad C' = A' \cap B'$

$P(A') = 0{,}2 \quad P(B') = 0{,}1$

$P(C) = 1 - P(C') = 1 - P(A' \cap B')$

$= 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}98$

④ Koupíme po jednom losu ve dvou různých tombolách. V první vyhrává každý pátý los, ve druhé každý desátý los. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň jeden z losů vyhraje?

DÚ

1. zp. A … vyhraje los z 1. tomboly $\quad P(A) = \frac{1}{5}$

B … vyhraje los z 2. tomboly $\quad P(B) = \frac{1}{10}$

– C … aspoň 1 los vyhraje $(C = A \cup B)$

$P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{10 + 5 - 1}{50} = \frac{14}{50} = 0{,}28$

2. zp. C' … nevyhraje žádný los

$C' = A' \cap B'$

$P(A') = \frac{4}{5} \quad P(B') = \frac{9}{10}$

$P(C) = 1 - P(C') = 1 - P(A' \cap B')$

$= 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} = \frac{14}{50} = 0{,}28$

⑤ V účetních dokladech je chyba. Kontrolují je nezávisle 2 kontroloři, první najde chybu s pravděpodobností 0,90, druhý s 0,95. Jaká je pravděpodobnost, že chybu nalezne aspoň jeden z nich?

A... první najde chybu $P(A)=0{,}90$
B... druhý najde chybu $P(B)=0{,}95$
C... aspoň 1 najde chybu $(C=A\cup B)$
$P(C)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$
$=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=$
$=0{,}9+0{,}95-0{,}9\cdot 0{,}95=0{,}995$

2. způs. s využ. opač. (doplň.) jevů
A', B'... nenajdou chybu
$P(A')=0{,}1 \quad P(B')=0{,}05$
C'... žádný kontr. nenajde chybu
$P(C)=1-P(C')=1-P(A'\cap B')=$
$=1-P(A')\cdot P(B')=1-0{,}1\cdot 0{,}05$
$=0{,}995$

⑥ V kanceláři pracují 2 sekretářky. První přijde pozdě do práce s pravděpodobností 0,1, druhá s 0,2. Jaká je

DÚ pravděpodobnost, že

A... první pozdě $P(A)=0{,}1$ $\quad A'$... první včas $P(A')=0{,}9$
B... druhá pozdě $P(B)=0{,}2$ $\quad B'$... druhá včas $P(B')=0{,}8$

a) obě přijdou včas, C'

$P(C')=P(A'\cap B')=P(A')\cdot P(B')=0{,}9\cdot 0{,}8=0{,}72$

[nebo $P(C')=1-P(C)=1-P(A\cup C)=1-(P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B))$ složit.]

b) aspoň jedna přijde včas. D'

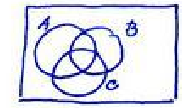
$P(D')=P(A'\cup B')=P(A')+P(B')-P(A'\cap B')=P(A')+P(B')-P(A')\cdot P(B')=$
$=0{,}9+0{,}8-0{,}9\cdot 0{,}8=1{,}7-0{,}72=0{,}98$

2. způs. D... žádná včas (obě pozdě)
$P(D')=1-P(D)=1-P(A\cap B)=1-P(A)P(B)=1-0{,}1\cdot 0{,}2=0{,}98$

⑦ V kanceláři pracují 3 sekretářky. První přijde pozdě do práce s pravděpodobností 0,1, druhá 0,2 a třetí 0,3. Jaká je pravděpodobnost, že POZOR! 3 SEKRETÁŘKY

A... první pozdě $P(A)=0{,}1$
B... druhá pozdě $P(B)=0{,}2$
C... třetí pozdě $P(C)=0{,}3$

a) aspoň jedna přijde včas $C'=A'\cup B'\cup C'$
(1 nebo 2 nebo 3)
$P(C')=P(A')+P(B')+P(C')-$? co odečíst
=> zdlouhavé, složité
=> D... všichni pozdě
$P(D')=1-P(D)=1-P(A\cap B\cap C)=1-P(A)P(B)P(C)$
$=1-0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3=1-0{,}006=0{,}994$



b) aspoň jedna přijde pozdě $E=A\cup B\cup C$ $\quad P(E)=P(A)+P(B)+P(C)-$? co odečíst → složité
=> E'... všichny včas
$P(E)=1-P(E')=1-P(A'\cap B'\cap C')=1-0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7=1-0{,}504=0{,}496$

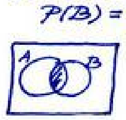
⑧ Dva střelci střílejí nezávisle na sobě na cíl. První má pravděpodobnost zásahu 0,6, druhý 0,7. Každý má

DÚ +ŠK jednu ránu. Jaká je pravděpodobnost, že

A... první zasáhne $P(A)=0{,}6$ $\quad B$... druhý zasáhne $P(B)=0{,}7$

a) oba zasáhnou cíl C

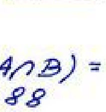
$P(C)=P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}6\cdot 0{,}7=0{,}42$



ČASTO SI LZE POMOCI MNOŽINAMI

b) žádný nezasáhne cíl D'

$P(D')=P(A'\cap B')=0{,}4\cdot 0{,}3=0{,}12$



$P(A')=0{,}4$
$P(B')=0{,}3$

c) aspoň jeden zasáhne cíl E
(1 nebo oba)
$P(E)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$
$=0{,}6+0{,}7-0{,}6\cdot 0{,}7=0{,}88$

d) právě jeden zasáhne cíl F
(1 nebo 2, ale ne oba)

$P(F)=P(A\cup B)-P(A\cap B)=[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]-P(A\cap B)=$
$=P(A)+P(B)-2P(A)\cdot P(B)=0{,}6+0{,}7-2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7=0{,}46$